

Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Cataluña 2023, Convocatoria ordinaria

mentoor.es



Sèrie 1

Ejercicio 1. Análisis

Calcule los coeficientes a , b , c y d de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ si sabemos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de inflexión $(1, 0)$ es $y = -3x + 3$ y que la función tiene un extrem relatiu en el punto de la gráfica de abscisa $x = 0$.

Solución:

Las condiciones del enunciado nos proporcionan un sistema de cuatro ecuaciones para determinar los cuatro coeficientes. La función y sus derivadas son:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

1. **La función pasa por el punto $(1, 0)$:** $f(1) = 0$.

$$a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d = 0 \implies a + b + c + d = 0 \quad (\text{E1})$$

2. **Tiene un punto de inflexión en $x=1$:** $f''(1) = 0$.

$$6a(1) + 2b = 0 \implies 6a + 2b = 0 \implies 3a + b = 0 \quad (\text{E2})$$

3. **La pendiente de la tangente en $x=1$ es -3 :** La pendiente de la recta $y = -3x + 3$ es -3 , por lo tanto $f'(1) = -3$.

$$3a(1)^2 + 2b(1) + c = -3 \implies 3a + 2b + c = -3 \quad (\text{E3})$$

4. **Tiene un extremo relativo en $x=0$:** $f'(0) = 0$.

$$3a(0)^2 + 2b(0) + c = 0 \implies c = 0 \quad (\text{E4})$$

Con $c = 0$, el sistema se simplifica: De (E3): $3a + 2b + 0 = -3 \implies 3a + 2b = -3$. De (E2): $3a + b = 0 \implies b = -3a$.

Sustituimos $b = -3a$ en la ecuación anterior:

$$3a + 2(-3a) = -3 \implies 3a - 6a = -3 \implies -3a = -3 \implies a = 1.$$

Ahora encontramos b :

$$b = -3(1) = -3.$$

Finalmente, usamos (E1) para encontrar d :

$$a + b + c + d = 0 \implies 1 + (-3) + 0 + d = 0 \implies -2 + d = 0 \implies d = 2.$$

Los coeficientes son $a = 1, b = -3, c = 0, d = 2$.

Ejercicio 2. Álgebra

Considere las dos matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcule las matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$.
 b) Sean C y D dos matrices cuadradas del mismo orden que satisfacen $C \cdot D = C$ y $D \cdot C = D$. Compruebe que las dos matrices, C y D , son idempotentes.

Solución:

- a) Calcule las matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$.

Calculamos el producto $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3-5 & 4+3-10 & 0+0-5 \\ -2-4+5 & -2-4+10 & 0+0+5 \\ 2+3-4 & 2+3-8 & 0+0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Observamos que $A \cdot B = A$.

Calculamos el producto $B \cdot A$:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2+0 & -6+8+0 & -10+10+0 \\ -2+1+0 & 3-4+0 & 5-5+0 \\ 2-2+1 & -3+8-3 & -5+10-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que $B \cdot A = B$.

$$A \cdot B = A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } B \cdot A = B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Sean C y D dos matrices cuadradas del mismo orden que satisfacen $C \cdot D = C$ y $D \cdot C = D$. Compruebe que las dos matrices, C y D , son idempotentes.

Una matriz M es idempotente si $M^2 = M$. Debemos probar que $C^2 = C$ y $D^2 = D$.

Prueba para C :

Partimos de la expresión que queremos demostrar: $C^2 = C \cdot C$.

Usamos la primera igualdad dada, $C = C \cdot D$, para sustituir la primera C :

$$C^2 = (C \cdot D) \cdot C = C \cdot (D \cdot C).$$

Ahora usamos la segunda igualdad, $D \cdot C = D$:

$$C^2 = C \cdot (D) = C \cdot D.$$

Finalmente, volvemos a usar la primera igualdad, $C \cdot D = C$:

$$C^2 = C.$$

Queda demostrado que C es idempotente.

Prueba para D:

Partimos de la expresión $D^2 = D \cdot D$.

Usamos la segunda igualdad, $D = D \cdot C$, para sustituir la primera D:

$$D^2 = (D \cdot C) \cdot D = D \cdot (C \cdot D).$$

Ahora usamos la primera igualdad, $C \cdot D = C$:

$$D^2 = D \cdot (C) = D \cdot C.$$

Finalmente, volvemos a usar la segunda igualdad, $D \cdot C = D$:

$$D^2 = D.$$

Queda demostrado que D es idempotente.

Queda demostrado que ambas matrices son idempotentes.

Ejercicio 3. Análisis

Sea $f'(x) = \begin{cases} x-1, & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$ la función derivada de una función derivable $f(x)$ que pasa por el punto $A = (0, 3)$.

- Calcule la función $f(x)$.
- Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $f'(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$.

Solución:

- Calcule la función $f(x)$.

Para encontrar $f(x)$, integramos cada trozo de la función derivada $f'(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \int (x-1)dx, & \text{si } x \leq 2 \\ \int \frac{1}{x-1}dx, & \text{si } x > 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + C_1, & \text{si } x \leq 2 \\ \ln|x-1| + C_2, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Sabemos que la función pasa por el punto $A(0, 3)$. Como $0 \leq 2$, usamos el primer trozo para encontrar C_1 :

$$f(0) = 3 \implies \frac{0^2}{2} - 0 + C_1 = 3 \implies C_1 = 3.$$

Como la función $f(x)$ es derivable, debe ser continua en todo su dominio, en particular en $x = 2$. Por tanto, los límites laterales deben coincidir en $x = 2$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \\ \frac{2^2}{2} - 2 + C_1 &= \ln|2-1| + C_2 \\ 2 - 2 + 3 &= \ln(1) + C_2 \implies 3 = 0 + C_2 \implies C_2 = 3. \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + 3, & \text{si } x \leq 2 \\ \ln(x-1) + 3, & \text{si } x > 2 \end{cases}.$$

- Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $f'(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$.

Queremos la recta tangente a la función $g(x) = f'(x)$ en $x = 3$. La ecuación será $y - g(3) = g'(3)(x - 3)$.

Como $3 > 2$, el trozo de $f'(x)$ que debemos usar es $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

- Valor de la función: $g(3) = f'(3) = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$.
- Derivada: La derivada de $g(x) = f'(x)$ es $g'(x) = f''(x)$.
Para $x > 2$, $f''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x-1} \right) = \frac{-1}{(x-1)^2}$.
- Pendiente: $g'(3) = f''(3) = \frac{-1}{(3-1)^2} = -\frac{1}{4}$.

El punto de tangencia es $(3, 1/2)$ y la pendiente es $-1/4$.

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 3) \implies y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \implies y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}.$$



La ecuación de la recta tangente es $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

Ejercicio 4. Álgebra

Sea el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real λ :

$$\begin{cases} x + 2\lambda y + (2 + \lambda)z = 0 \\ (2 + \lambda)x + y + 2\lambda z = 3 \\ 2\lambda x + (2 + \lambda)y + z = -3 \end{cases}$$

- Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro λ .
- Para el caso $\lambda = -1$, resuelva el sistema, interprételo geoméricamente e identifique la solución.

Solución:

- Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro λ .

Aplicamos el Teorema de Rouché-Frobenius. Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

Si sumamos las tres filas, observamos que $F_1 + F_2 + F_3 = (3 + 3\lambda, 3 + 3\lambda, 3 + 3\lambda)$.

Podemos sacar factor común $(3 + 3\lambda)$.

Por tanto, el determinante será cero si $3 + 3\lambda = 0 \implies \lambda = -1$.

Otra posible solución es cuando las tres filas son iguales, o dos de ellas. Para $\lambda = 1$, F_2 y F_3 se parecen. $|A| = (3\lambda + 3)(\lambda - 1)^2$. Las raíces son $\lambda = -1$ y $\lambda = 1$.

Caso 1: $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \mid |A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3$. El sistema es **Compatible Determinado (S.C.D.)**.

Caso 2: $\lambda = -1$

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right).$$

Sumando las tres filas obtenemos $(0, 0, 0|0)$. Son linealmente dependientes. $\text{Rg}(A) = 2$. Como el término independiente también suma 0, $\text{Rg}(A^*) = 2$.

$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 2 < 3$. El sistema es **Compatible Indeterminado (S.C.I.)**.

Caso 3: $\lambda = 1$

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \end{array} \right). \text{Rg}(A) = 2.$$

Para $\text{Rg}(A^*)$, calculamos el determinante con C_1, C_2, C_4 : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 1(-12) - 2(-15) = 18 \neq 0$.

$\text{Rg}(A^*) = 3$.

$\text{Rg}(A) = 2 \neq \text{Rg}(A^*) = 3$. El sistema es **Incompatible (S.I.)**.

Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \implies \text{S.C.D.}$
 Si $\lambda = -1 \implies \text{S.C.I.}$
 Si $\lambda = 1 \implies \text{S.I.}$

- b) Para el caso $\lambda = -1$, resuelva el sistema, interprételo geoméricamente e identifique la solución.

Para $\lambda = -1$, el sistema es Compatible Indeterminado. Tomamos las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

Restando la primera de la segunda: $3y - 3z = 3 \implies y - z = 1 \implies y = z + 1$.

Hacemos un cambio de variable, sea $z = t$. Entonces $y = t + 1$.

Sustituimos en la primera ecuación: $x - 2(t + 1) + t = 0 \implies x - 2t - 2 + t = 0 \implies x = t + 2$.

La solución es una recta: $(x, y, z) = (t + 2, t + 1, t)$.

Interpretación geométrica: Las tres ecuaciones representan tres planos que se cortan en una recta común, que es la solución del sistema.

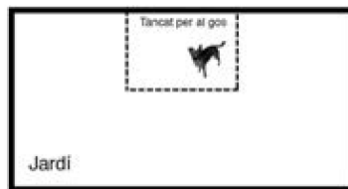
Solución: $(x, y, z) = (2, 1, 0) + t(1, 1, 1), \forall t \in \mathbb{R}$.

Interpretación: Tres planos que se cortan en una recta.

Ejercicio 5. Análisis

La Nuria tiene un jardín rectangular y quiere hacer un cercado (rectangular o cuadrado) de $8m^2$ para su perro. Ha pensado en poner el cercado tocando el muro del jardín, tal como se muestra en la figura de la derecha, para ahorrarse así uno de los cuatro costados. El precio de la valla que quiere usar es de 2,5 €/m.

- ¿Qué dimensiones ha de tener el cercado para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es este coste mínimo?
- Si mantiene la forma rectangular o cuadrada del cercado y hace que uno de los vértices del jardín coincida con un vértice del cercado, ¿cuántos euros se puede ahorrar? Razone cómo pondría el cercado y justifique con cálculos matemáticos las dimensiones de su propuesta.



Solución:

- ¿Qué dimensiones ha de tener el cercado para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es este coste mínimo?

Sean x e y las dimensiones del cercado. Suponemos que el lado de longitud x es paralelo al muro.

El área es $A = xy = 8 \implies y = 8/x$.

La longitud de valla a utilizar es $L = x + 2y$.

El coste es $C = 2.5 \cdot L = 2.5(x + 2y)$.

Sustituimos y para expresar el coste en función de x :

$$C(x) = 2.5 \left(x + 2 \frac{8}{x} \right) = 2.5 \left(x + \frac{16}{x} \right).$$

Para minimizar el coste, derivamos e igualamos a cero:

$$C'(x) = 2.5 \left(1 - \frac{16}{x^2} \right).$$

$$C'(x) = 0 \implies 1 - \frac{16}{x^2} = 0 \implies x^2 = 16 \implies x = 4.$$

La segunda derivada $C''(x) = 2.5(32/x^3)$ es positiva para $x > 0$, así que es un mínimo.

Las dimensiones son: $x = 4$ m. Entonces, $y = 8/4 = 2$ m.

El coste mínimo es: $C(4) = 2.5(4 + 16/4) = 2.5(4 + 4) = 2.5(8) = 20$.

Dimensiones: 4m (paralelo al muro) y 2m (perpendicular). Coste mínimo: 20 .

- b) Si mantiene la forma rectangular o cuadrada del cercado y hace que uno de los vértices del jardín coincida con un vértice del cercado, ¿cuántos euros se puede ahorrar? Razone cómo pondría el cercado y justifique con cálculos matemáticos las dimensiones de su propuesta.

Si un vértice del cercado coincide con la esquina del jardín, se aprovechan dos muros. La longitud de valla necesaria sería $L = x + y$.

El coste a minimizar es $C(x) = 2.5(x + y) = 2.5(x + 8/x)$.

Derivamos: $C'(x) = 2.5(1 - 8/x^2)$.

$$C'(x) = 0 \implies x^2 = 8 \implies x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Las dimensiones son $x = 2\sqrt{2}$ m e $y = 8/(2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ m. El cercado es un cuadrado.

El coste mínimo en este caso es: $C(2\sqrt{2}) = 2.5(2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) = 2.5(4\sqrt{2}) = 10\sqrt{2} \approx 14.14$.

El ahorro es: $20 - 10\sqrt{2} \approx 20 - 14.14 = 5.86$.

Se puede ahorrar $20 - 10\sqrt{2} \approx 5.86$ con un cercado cuadrado de lado $2\sqrt{2}$ m.

Ejercicio 6. Geometría

Sean los planos π_1 y π_2 , determinados respectivamente por las ecuaciones $\pi_1 : x + y = 3$ y $\pi_2 : x - z = -2$.

- Encuentre la ecuación general ($Ax + By + Cz + D = 0$) del plano π_3 , que es perpendicular a π_1 y π_2 , y que pasa por el punto $P = (4, 1, 2)$.
- Sea r la recta de intersección de π_1 y π_2 . Calcule la ecuación vectorial de la recta r .
- Calcule el punto Q de la recta r que es más cercano al punto P .

Solución:

- Encuentre la ecuación general ($Ax + By + Cz + D = 0$) del plano π_3 , que es perpendicular a π_1 y π_2 , y que pasa por el punto $P = (4, 1, 2)$.

El vector normal de π_3 , $\vec{n}_3$, debe ser perpendicular a los vectores normales de π_1 y π_2 .

$\vec{n}_1 = (1, 1, 0)$ y $\vec{n}_2 = (1, 0, -1)$.

$$\vec{n}_3 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 1, -1).$$

La ecuación del plano π_3 es $-x + y - z + D = 0$. Como pasa por $P(4, 1, 2)$: $-(4) + (1) - (2) + D = 0 \implies -5 + D = 0 \implies D = 5$.

La ecuación es $-x + y - z + 5 = 0$ o $x - y + z - 5 = 0$.

La ecuación del plano es $x - y + z - 5 = 0$.

- Sea r la recta de intersección de π_1 y π_2 . Calcule la ecuación vectorial de la recta r .

La recta r está definida por el sistema
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - z = -2 \end{cases}.$$

El vector director de la recta, $\vec{v}_r$, es perpendicular a ambos vectores normales, por lo que $\vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-1, 1, -1)$.

Para encontrar un punto de la recta, hacemos por ejemplo $x = 0$. Entonces $y = 3$ y $z = 2$. Un punto es $P_r(0, 3, 2)$.

La ecuación vectorial es: $(x, y, z) = (0, 3, 2) + \lambda(-1, 1, -1)$.

La ecuación vectorial es $(x, y, z) = (0, 3, 2) + \lambda(-1, 1, -1)$.

- Calcule el punto Q de la recta r que es más cercano al punto P .

El punto Q es la proyección ortogonal de $P(4, 1, 2)$ sobre la recta r . Es la intersección de la recta r con un plano π_p que es perpendicular a r y que contiene a P .

El vector normal de π_p es el director de r , $\vec{n}_p = \vec{v}_r = (-1, 1, -1)$.

La ecuación de π_p es $-x + y - z + D = 0$. Como pasa por $P(4, 1, 2)$:

$$-(4) + (1) - (2) + D = 0 \implies -5 + D = 0 \implies D = 5. \text{ El plano es } -x + y - z + 5 = 0.$$

Para encontrar Q, sustituimos la ecuación paramétrica de r en la ecuación de este plano:

Un punto genérico de r es $Q(-\lambda, 3 + \lambda, 2 - \lambda)$.

$$-(-\lambda) + (3 + \lambda) - (2 - \lambda) + 5 = 0 \implies \lambda + 3 + \lambda - 2 + \lambda + 5 = 0 \implies 3\lambda + 6 = 0 \implies \lambda = -2.$$

El punto Q es: $Q(-(-2), 3 + (-2), 2 - (-2)) = (2, 1, 4)$.

El punto más cercano es $Q(2, 1, 4)$.

Sèrie 5

Ejercicio 1. Análisis

Considere las funciones $f(x) = -x^2 + x + 6$ y $g(x) = -9x + 3x^2$.

- Calcule el área de la región delimitada por las dos funciones.
- Encuentre la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $(-2, 0)$. Represente esta recta tangente y las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en unos mismos ejes de coordenadas.

Solución:

- Calcule el área de la región delimitada por las dos funciones.

Primero, encontramos los puntos de corte de las dos funciones igualando sus ecuaciones:

$$-x^2 + x + 6 = -9x + 3x^2 \implies 4x^2 - 10x - 6 = 0 \implies 2x^2 - 5x - 3 = 0.$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4}.$$

Las abscisas de los puntos de corte son $x_1 = \frac{12}{4} = 3$ y $x_2 = \frac{-2}{4} = -1/2$.

El área viene dada por la integral de la diferencia de las funciones entre los puntos de corte.

En el intervalo $(-1/2, 3)$, $f(x)$ está por encima de $g(x)$.

$$A = \int_{-1/2}^3 (f(x) - g(x))dx = \int_{-1/2}^3 ((-x^2 + x + 6) - (-9x + 3x^2))dx = \int_{-1/2}^3 (-4x^2 + 10x + 6)dx.$$

$$\begin{aligned} A &= \left[-\frac{4x^3}{3} + 5x^2 + 6x \right]_{-1/2}^3 = \left(-\frac{4(27)}{3} + 5(9) + 18 \right) - \left(-\frac{4(-1/8)}{3} + 5(1/4) + 6(-1/2) \right) \\ &= (-36 + 45 + 18) - \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{4} - 3 \right) = 27 - \left(\frac{2 + 15 - 36}{12} \right) = 27 - \left(-\frac{19}{12} \right) = \frac{324 + 19}{12} = \frac{343}{12}. \end{aligned}$$

El área es $\frac{343}{12} \text{ u}^2$.

- Encuentre la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $(-2, 0)$. Represente esta recta tangente y las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en unos mismos ejes de coordenadas.

La ecuación de la recta tangente es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

El punto de tangencia es $(-2, 0)$.

Calculamos la derivada: $f'(x) = -2x + 1$.

La pendiente en $x = -2$ es $m = f'(-2) = -2(-2) + 1 = 5$.

La recta tangente es:

$$y - 0 = 5(x - (-2)) \implies y = 5x + 10.$$



La ecuación de la recta tangente es $y = 5x + 10$.

Ejercicio 2. Álgebra

Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + kz = -1 \\ x + ky + z = 3 \\ 2x + (k-1)y + 2z = 2 \end{cases}$$

en que k es un parámetro real.

- Discuta el sistema en función del valor de k .
- Resuelva el sistema para $k = 0$ y para $k = 1$.

Solución:

- Discuta el sistema en función del valor de k .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 2 & k-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = 1(2k - (k-1)) - (-1)(2-2) + k(k-1-2k) = k+1 - k(k+1) = (k+1)(1-k).$$

$$|A| = 0 \text{ si } k = 1 \text{ o } k = -1.$$

$$\text{Caso 1: } k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3. \text{ S.C.D.}$$

$$\text{Caso 2: } k = 1. \text{ Rg}(A) = 2. \text{ Rg}(A^*) = 2. \text{ S.C.I.}$$

$$\text{Caso 3: } k = -1. \text{ Rg}(A) = 2. \text{ Rg}(A^*) = 3. \text{ S.I.}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} &\implies \text{S.C.D.} \\ \text{Si } k = 1 &\implies \text{S.C.I.} \\ \text{Si } k = -1 &\implies \text{S.I.} \end{aligned}$$

- Resuelva el sistema para $k = 0$ y para $k = 1$.

$$\text{Caso } k=0: \text{ S.C.D. } |A| = 1. \ x = 1, y = 2, z = 0.$$

$$\text{Caso } k=1: \text{ S.C.I. } x + z = 1, y = 2. \text{ Solución: } (1 - \lambda, 2, \lambda), \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \text{Para } k=0: & \ (1, 2, 0). \\ \text{Para } k=1: & \ (1 - \lambda, 2, \lambda), \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Geometría

Considere las rectas en el espacio $r : x = -y = z + m$ y $s : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$ en que m es un parámetro real.

- Estudie la posición relativa para los diferentes valores del parámetro m .
- Calcule m para que la distancia entre las rectas r y s sea de $\sqrt{2}$ unidades.

Solución:

- Estudie la posición relativa para los diferentes valores del parámetro m .

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+m}{1} \implies P_r(0, 0, -m), \vec{v}_r(1, -1, 1).$$

$$s : x = z, y = 1 - x \implies s \equiv (0, 1, 0) + \lambda(1, -1, 1).$$

$$P_s(0, 1, 0), \vec{v}_s(1, -1, 1).$$

Los vectores directores son idénticos, por tanto las rectas son **paralelas o coincidentes**.

Son coincidentes si P_r está en s : $0 = \lambda, 0 = 1 - \lambda, -m = \lambda$. Imposible.

Las rectas son siempre paralelas y distintas.

Para todo valor de m , las rectas son paralelas y distintas.

- Calcule m para que la distancia entre las rectas r y s sea de $\sqrt{2}$ unidades.

$$d(r, s) = d(P_r, s) = \frac{|P_s \vec{P}_r \times \vec{v}_s|}{|\vec{v}_s|}.$$

$$P_s \vec{P}_r = (0, -1, -m).$$

$$P_s \vec{P}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -m \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1 - m, -m, 1).$$

$$|P_s \vec{P}_r \times \vec{v}_s| = \sqrt{(-1 - m)^2 + (-m)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 2m + m^2 + m^2 + 1} = \sqrt{2m^2 + 2m + 2}.$$

$$|\vec{v}_s| = \sqrt{3}.$$

$$d(r, s) = \sqrt{\frac{2m^2 + 2m + 2}{3}} = \sqrt{2} \implies \frac{2m^2 + 2m + 2}{3} = 2 \implies 2m^2 + 2m + 2 = 6 \implies m^2 + m - 2 = 0$$

Soluciones: $m = 1, m = -2$.

Los valores son $m = 1$ y $m = -2$.

Ejercicio 4. Análisis

En una carretera principal encontramos el pueblo A. Se quiere construir una torre de comunicaciones T para que el precio del cableado sea mínimo y cuál será el valor de este precio mínimo.

Solución:

Sea $O = (0, 0)$, $A = (12, 0)$ y $B = (0, 9)$. La torre T está en $(x, 0)$ con $0 \leq x \leq 12$.

Distancia TA = $12 - x$. Distancia TB = $\sqrt{(x - 0)^2 + (0 - 9)^2} = \sqrt{x^2 + 81}$.

Coste $C(x) = 125(12 - x) + 250\sqrt{x^2 + 81}$.

$$C'(x) = -125 + \frac{250(2x)}{2\sqrt{x^2 + 81}} = -125 + \frac{250x}{\sqrt{x^2 + 81}}$$

$$\begin{aligned} C'(x) = 0 &\implies 125 = \frac{250x}{\sqrt{x^2 + 81}} \implies \sqrt{x^2 + 81} = 2x \implies x^2 + 81 = 4x^2 \\ &\implies 3x^2 = 81 \implies x^2 = 27 \implies x = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Coste mínimo:

$$\begin{aligned} C(3\sqrt{3}) &= 125(12 - 3\sqrt{3}) + 250\sqrt{27 + 81} = 1500 - 375\sqrt{3} + 250\sqrt{108} = \\ &= 1500 - 375\sqrt{3} + 1500\sqrt{3} = 1500 + 1125\sqrt{3} \approx 3448.56 \end{aligned}$$

Distancia de O: $3\sqrt{3}$ km. Precio mínimo: $1500 + 1125\sqrt{3}$ euros.

Ejercicio 5. Álgebra

Considere la familia S de matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ en que $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.

b) Encuentre todas las matrices de la familia S que verifican la igualdad $A^2 = I$.

Solución:

a) Calcule $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.

$$\text{Sea } M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. |M| = 3. M^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}.$$

b) Encuentre todas las matrices de la familia S que verifican la igualdad $A^2 = I$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$a^2 + b^2 = 1$ y $2ab = 0$. De la segunda, $a = 0$ o $b = 0$.

Si $a = 0 \implies b^2 = 1 \implies b = \pm 1$. Matrices: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $b = 0 \implies a^2 = 1 \implies a = \pm 1$. Matrices: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Las matrices son: } \pm I, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6. Análisis

Sea la función $f(x) = \frac{ax^2+x+b}{x^2+1}$.

- Calcule los valores de los parámetros a y b si sabemos que la gráfica de la función f tiene un extrem relatiu en $x = -1$ y pasa por el punto $P(-2, 13/5)$.
- Para el caso $a = b$, calcule y clasifique los extremos relativos de la función.

Solución:

- Calcule los valores de los parámetros a y b si sabemos que la gráfica de la función f tiene un extrem relatiu en $x = -1$ y pasa por el punto $P(-2, 13/5)$.

$$f'(-1) = 0 \text{ y } f(-2) = 13/5.$$

$$f'(x) = \frac{-x^2+2x(1-b)+a-b}{(x^2+1)^2}.$$

$$f'(-1) = 0 \implies -1 - 2(1-b) + a - b = 0 \implies a + b = 3.$$

$$f(-2) = 13/5 \implies \frac{4a-2+b}{5} = \frac{13}{5} \implies 4a + b = 15.$$

Resolviendo el sistema, $a = 4, b = -1$.

$$\boxed{a = 4, b = -1.}$$

- Para el caso $a = b$, calcule y clasifique los extremos relativos de la función.

$$\text{Si } a = b, f'(x) = \frac{-x^2+2x(1-a)}{(x^2+1)^2}. f'(x) = 0 \implies x(-x+2(1-a)) = 0. x = 0 \text{ y } x = 2(1-a).$$

$$\boxed{\text{Los extremos están en } x = 0 \text{ y } x = 2(1-a).}$$